Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Christoph Brackenhofer — Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 11
Abgabe: 31.01.2023, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Sei $P(T)$ ein irreduzibles separables Polynom über dem Körper k und $K \supset k$ sein Zerfällungskörper.

(a) Gegeben α und β Nullstellen von $P(T)$ in K, zeige, dass es ein Element φ aus $\mathrm{Gal}(K/k)$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$ gibt. Insbesondere wirkt $\mathrm{Gal}(K/k)$ transitiv auf der Menge der Nullstellen von $P(T)$ in K.

HINWEIS: Konstruiere φ schrittweise.

(b) Wirkt $\mathrm{Gal}(K/k)$ treu auf der Menge der Nullstellen von $P(T)$ in K?

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**
Sei $k \subset K$ eine endliche galoissche Körpererweiterung und betrachte ein beliebiges Element a aus K. Sei $\{a = a_1, \ldots, a_m\}$ eine Aufzählung der verschiedenen Bilder $\varphi(a)$ mit φ aus $\mathrm{Gal}(K/k)$.

(a) Begründe, dass die Koeffizienten des Polynoms $P(T) = \prod_{i=1}^{m}(T - a_i)$ in k liegen.

(b) Zeige, dass $P(T)$ das Minimalpolynom von a über k ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.**
Betrachte das irreduzible Polynom $P(T) = T^4 - 2$ über dem Körper $\mathbb{Q}$. Sei nun K ein Zerfällungskörper von $P(T)$.

(a) Zeige, dass die komplexe Zahl i in K liegt.

(b) Schließe daraus, dass $K = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ mit $\alpha^4 = 2$. Bestimme den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

(c) Zeige, dass die Vorschriften $\varphi : \begin{array}{ccc} \alpha & \mapsto & \alpha \\ i & \mapsto & -i \end{array}$ und $\psi : \begin{array}{ccc} \alpha & \mapsto & i\alpha \\ i & \mapsto & i \end{array}$ die $\mathbb{Q}$-Automorphismen φ und ψ aus $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ eindeutig bestimmen.

(d) Schließe daraus, dass $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorph zu der Untergruppe H von $\mathrm{Sym}(\mathcal{U}_4)$ von Aufgabe 3 auf Blatt 2 ist.

(e) Gib primitive Elemente für die Zwischenkörper an, welche den Untergruppen $H_1 = \langle\psi\rangle$, $H_2 = \langle\psi \circ \psi, \varphi\rangle$ und $H_3 = \langle\psi \circ \psi, \psi \circ \varphi\rangle$ durch die Galoiskorrespondenz zugeordnet sind.

(f) Ohne das Gruppengesetz zu benutzen, bestimme, ob $\langle\varphi\rangle$ ein Normalteiler von $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.